

«Супер-быстрый» алгоритм решения задач рассеяния

Л.Л. Фрумин^{1*}, А.Е. Чернявский^{1,2}

¹ Институт автоматики и электрометрии СО РАН

² Новосибирский государственный университет

* E-mail: lfrumin@iae.nsk.su

DOI:10.31868/RFL.2024.223-224

Одним из наиболее эффективных подходов к решению (прямой) задачи рассеяния является метод трансфер-матриц (МТМ), или Т-матриц [1]. Он широко используется в оптике для расчета лазерных зеркал, оптических фильтров, просветляющих элементов. В последнее время МТМ нашел применение для расчета рассеяния в волоконных брэгговских решетках, используемых в оптических линиях связи, волоконных лазерах и в современных оптических измерительных системах, сенсорах и датчиках. МТМ сводит решение задачи рассеяния к перемножению Т-матриц. Точность и производительность метода зависит от алгоритма расчета матриц и скорости вычисления их произведения.

Расчет Т-матриц основан на дискретной аппроксимации уравнений Гельмгольца. Высокую точность дают интегральные подходы, такие как метод конечных объемов. Для электрического поля волны $E(x)$ с волновым вектором k для объекта с показателем преломления $n(x)$ запишем одномерное уравнение Гельмгольца: $E''(x) + k^2 n^2(x) E(x) = 0$. Представим поле $E(x)$ как сумму бегущих волн объемного френелева отражения [2], подчиненных преобразованию Бреммера [3]: $E(x) = (Be^{is} + Ae^{-is})/\sqrt{\kappa n}$; $E'(x) = i\sqrt{\kappa n}(Be^{is} - Ae^{-is})$, где $s = \kappa\xi$, а $\xi = \int_0^x n(x) dx$ - оптическая координата, i - мнимая единица. Для амплитуд A и B получим следующую пару дифференциальных уравнений первого порядка: $B' = n'/(2n)Ae^{-2is}$, $A' = n'/(2n)Be^{2is}$, где штрих обозначает производную по ξ . Интегрируя эти уравнения и вводя в качестве нормированных амплитуд волн функции $u(\xi) = A(\xi)e^{-i\kappa\xi}$, $v(\xi) = B(\xi)e^{i\kappa\xi}$, запишем интегральные уравнения:

$$\begin{cases} v(\xi_{m+1})e^{-i\kappa\xi_{m+1}} - v(\xi_m)e^{-i\kappa\xi_m} = \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} q(\xi)e^{-i\kappa\xi}u(\xi)d\xi \\ u(\xi_{m+1})e^{i\kappa\xi_{m+1}} - u(\xi_m)e^{i\kappa\xi_m} = \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} q(\xi)e^{+i\kappa\xi}v(\xi)d\xi \end{cases}$$

Здесь $q(\xi) = n'/(2n)$ обозначает эффективный коэффициент связи мод (КСМ). Пусть рассеивающий объект расположен внутри интервала координат $[\xi_0, \xi_N]$. Введем дискретную сетку по оптической координате: $\xi_m = \xi_0 + 2mh$, $m = 0, \dots, N$, где $h = (\xi_N - \xi_0)/(2N)$ - полушаг сетки. Дискретизация системы интегральных уравнений методом трапеций дает следующую Т-матрицу:

$$T_m = z^{-1/2}(1 - h^2 q_{m+1}^2)^{-1} \begin{bmatrix} 1 + h^2 q_{m+1} q_m z & h(q_m + q_{m+1} z) \\ h(q_{m+1} + q_m z) & z + h^2 q_{m+1} q_m \end{bmatrix}, \text{ где } z = \exp(4ikh)$$

- спектральный параметр задачи. Эта матрица обеспечивает второй глобальный порядок точности аппроксимации для основного уравнения метода МТМ:

$$\begin{pmatrix} u_{m+1} \\ v_{m+1} \end{pmatrix} = T_m \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix}. \text{ Для правой задачи рассеяния граничные условия имеют вид: } \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\kappa\xi_0} \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Требуется найти спектральные коэффициенты рассеяния}$$

$$a(k), b(k) \text{ из уравнения } \begin{pmatrix} a(k)e^{-i\kappa\xi_N} \\ b(k)e^{i\kappa\xi_N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_N \\ v_N \end{pmatrix}. \text{ Решение находится}$$

перемножением Т-матриц: $\begin{pmatrix} u_N \\ v_N \end{pmatrix} = T_{N-1} T_{N-2} \dots T_1 T_0 \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$. Коэффициенты $a(\kappa), b(\kappa)$ определяют спектр коэффициента отражения $r(\kappa) = b(\kappa)/a(\kappa)$. Численный алгоритм должен найти дискретные значения спектральных коэффициентов для N значений волнового вектора $\kappa_j, j = 0, 1, \dots, N-1$, путем расчета произведения матриц, для соответствующих значений спектрального параметра z_j . Расчет сводится к перемножению полиномов, так как элементы Т-матрицы представляют собой биномы от параметра z . Оценка требуемого числа операций умножения дает квадратичную зависимость $O(N^2)$ от размера сетки N для последовательного умножения матриц. В докладе [4] в задаче рассеяния для системы Захарова-Шабата для ускорения расчетов предложено использовать алгоритм дублирования, теорему о свертке и быстрое преобразование Фурье (БПФ). При этом размер сетки выбирается в виде степени двойки $N = 2^M$. Матрицы разбиваются на соседние пары, которые попарно перемножаются. Полученные матрицы снова попарно перемножаются и т.д., до получения итоговой матрицы, содержащей полиномы N -го порядка. Такой способ в 4 раза уменьшает число умножений, по сравнению с последовательным перемножением матриц. Еще больший выигрыш дает использование теоремы о свертке и применение БПФ. На m -м шаге парного произведения матриц, для каждого элемента матрицы полином $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_l z^l$ степени $l = 2^{m-1}$ умножается на другой полином $b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_l z^l$, той же степени. Произведение полиномов и дает полином степени $2l = 2^m$ с коэффициентами $c_j, j = 0, 1, \dots, 2l$. Коэффициенты c_j итогового полинома представимы в виде дискретной свертки: $c_j = \sum_{l=0}^j a_l b_{j-l}, j = 0, 1, \dots, m$. По теореме о свертке, ее можно быстро вычислить с помощью трех БПФ, каждое из которых потребует $O(2lm)$ операций умножения. В итоге мы получили «супер-быстрый» алгоритм расчета спектральной задачи рассеяния, которому нужно всего $O(N \log_2^2 N)$ операций умножения для расчета N спектральных значений коэффициентов рассеяния. Тесты алгоритма опирались на точные решения [5] уравнения Гельмгольца. Расчеты подтвердили второй порядок точности и высокую скорость счета алгоритма.

Работа поддержана РНФ, грант № 24-22-00183.

Литература

- [1] Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, (1973), 343 с.
- [2] Раутиан С.Г. Введение в физическую оптику, «ЛИБРИКОМ», (2003), 256 с.
- [3] Belai O.V., Frumin L.L. et al. Optics Letters, **33**, 2101-2103 (2008)
- [4] Wahls S., Poor H.V. Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process. 5780-5784 (2013).
- [5] Shapiro D.A. Optics Communications, **215**, 295-301 (2003).